Espaces pointés vs non pointés :

$[X,Y]_* = \{$classes d'homotopie d'applications respectant les points base$\}$ (X, Y pointés)

$[X,Y] = \{$classes d'homotopie d'applications$\}$

L'adjonction $\Sigma \dashv \Omega$ marche avec $[\cdot,\cdot]_*$: $[\Sigma X, Y]_* \simeq [X, \Omega Y]_*$.

Pour la K-théorie :

* $K_0(X)$ = groupe de Grothendieck de la catégorie exacte des $\mathbb{C}$-fibrés vectoriels sur X
* X pointé : $\tilde{K}_0(X) = \mathrm{Ker}\,(K_0(X) \longrightarrow K_0(*))$
  $\tilde{K}_n(X) = \tilde{K}_0(\Sigma^n X)$
* X quelconque : $K_n(X) = \tilde{K}_n(X \amalg \{*\})$

Représentabilité : Pour X pointé, $\tilde{K}_0(X) \simeq [X, BU]_* \simeq [X, BU \times \mathbb{Z}]_*$,

donc $\tilde{K}_n(X) \simeq [\Sigma^n X, BU]_* \simeq [X, \Omega^n BU]_*$ $(\simeq [X, \Omega^n(BU \times \mathbb{Z})]_*)$.

Pour X quelconque, $K_0(X) \simeq [X, BU \times \mathbb{Z}]$.

Périodicité de Bott : $\Omega^2 BU \simeq BU \times \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \tilde{K}_{n+2}(X) \simeq \tilde{K}_n(X)$

$$\begin{matrix} \Omega^2 BU \\ \wr\wr \\ \Omega^2(BU \times \mathbb{Z}) \end{matrix}$$

Rappels sur la construction + de Quillen

<u>déf</u> : (i) X est <u>acyclique</u> si $\widetilde{H}_*(X) = 0$. $\quad (H_*(X) = H_*(X;\mathbb{Z}))$

(ii) $f : X \longrightarrow Y$ est <u>acyclique</u> si la fibre homotopique (en tout point de $\pi_0(X)$) F_f de f est acyclique.

<u>thm</u> : Soit X un CW complexe connexe, $N \triangleleft \pi_1(X)$ un sous-groupe parfait (i.e. $N = [N, N]$). Alors :

(i) Il existe $f : X \longrightarrow X^+$ acyclique tq

$$\pi_1(f) = (\pi_1(X) \longrightarrow \underset{\pi_1(X^+)}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\pi_1(X)/N}}}).$$

(ii) Pour tout $g : X \longrightarrow Y$ tel que $\pi_1(g)(N) = 0$,

$\exists\ h : X^+ \longrightarrow Y$ tq $h \circ f \sim g$ (homotope) et h est unique à homotopie près.

$$\begin{tikzcd} & X^+ \arrow[d, dotted, "h"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Soit A un anneau commutatif (pour simplifier).

$$GL(A) = \bigcup_{n \geq 1} GL_n(A)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} GL_n(A) & \hookrightarrow & GL_{n+1}(A) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$E(A) \subset GL(A)$ sous-groupe engendré par les transvections.

<u>lemme de Whitehead</u> : $E(A) = [GL(A), GL(A)] = [E(A), E(A)]$.

<u>déf</u> : $BGL(A)^+$ = résultat de la construction $+$ pour $X = BGL(A)$ et $N = E(A) \subset GL(A) = \pi_1(X)$.

<u>déf</u> : $K_n(A) = \pi_n\left(BGL(A)^+\right)$ pour $n \geqslant 1$

$K_0(A) = K(\{A\text{-modules projectifs de type fini}\})$

<u>ex</u> : $K_1(A) = BGL(A)/E(A) = BGL(A)_{ab} = H_1(BGL(A), \mathbb{Z})$

Plus généralement, on a l'application de Hurewicz :

$$\pi_n(BGL(A)^+) \to H_n(BGL(A)^+) \simeq H_n(BGL(A)) \simeq H_n(GL(A), \mathbb{Z})$$

<u>prop</u> : $BGL(A)^+$ est un H-espace.

<u>cor</u> : $(*)$ induit un isomorphisme : (thm de Cartan-Serre)

$$K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \xrightarrow{\sim} \underbrace{P}_{\text{éléments primitifs}} H_n(GL(A), \mathbb{Z}).$$

<u>Preuve de la prop</u> :

<u>lemme 1</u> : Soit $f : X \longrightarrow Y$ tel que :

* $\pi_1(X)$ agit trivialement sur $H_*(\tilde{X})$ ($\tilde{X}$ = revêtement universel de X)
  $\pi_1(Y)$ " " $H_*(\tilde{Y})$ ($\tilde{Y}$ " " Y)
* $H_*(f) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ est un isomorphisme ;
* $\pi_1(f) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme.

Alors f est une équivalence d'homotopie.

<u>Idée</u> : ($\pi = \pi_1(X)$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ K(\pi,1) \arrow[r, "id"] & K(\pi,1) \end{tikzcd}$$

$+$ $H_*(\tilde{X})$, $H_*(\tilde{Y})$ système local trivial sur X, Y $+$ suite spectrale de fibration

$\Longrightarrow H_*(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} H_*(\tilde{Y}) \Longrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$

$\Longrightarrow X \xrightarrow{\sim} Y$. $\square$

<u>lemme 2</u> : $B(GL(A) \times GL(A)) \xrightarrow{\sim} BGL(A) \times BGL(A)$ induit $B(GL(A) \times GL(A))^+ \xrightarrow{p} BGL(A)^+ \times BGL(A)^+$, et p est une équivalence d'homotopie. (Par le lemme 1, $\underline{Rq}$: $\widetilde{BGL(A)^+} = BE(A)^+$.)

On choisit $\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{N} \amalg \mathbb{N} \xrightarrow[\alpha_1 \amalg \alpha_2]{\sim} \mathbb{N}$.

Si $M \in GL(A)$, on définit $\alpha_i(M) \in GL(A)$ par :

$$\alpha_i(M)_{k,l} = \begin{cases} M_{\alpha_i^{-1}(k), \alpha_i^{-1}(l)} & \text{si } k,l \in \alpha_i(\mathbb{N}) \\ \delta_{kl} & \text{sinon} \end{cases}.$$

On définit $\oplus : GL(A) \times GL(A) \longrightarrow GL(A)$ (morphisme de groupes) par $M \oplus N = \alpha_1(M)\, \alpha_2(N)$.

On définit $\mu : BGL(A)^+ \times BGL(A)^+ \xrightarrow{\text{"}\simeq\text{"}} B(GL(A) \times GL(A))^+ \xrightarrow{\oplus} BGL(A)^+$.

Question : A-t-on $\varphi : x \mapsto \mu(x, *)$ et $\psi : x \mapsto \mu(*, x)$ homotopes à l'identité ?

Réponse : Pas forcément. Mais φ et ψ agissent par id sur $H_*(BGL(A)^+)$ (car $\forall g_1, \dots, g_n \in GL(A)$, $\exists c, d \in GL(A)$ tq $c g_i c^{-1} = g_i \oplus 1$, $d g_i d^{-1} = 1 \oplus g_i$), donc φ et ψ sont des équivalences d'homotopie par le lemme 1. Soient l et r des inverses à homotopie près, alors $\mu \circ (l, r)$ est une structure de H-espace sur $BGL(A)^+$. $\square$

(4) Finitude de la K-théorie des anneaux d'entiers

thm : Soit F un corps de nombres. Alors $K_n(\mathcal{O}_F)$ est de type fini $\forall n \in \mathbb{N}$.

ex : $K_0(\mathcal{O}_F) \simeq \mathbb{Z} \oplus Cl(F)$
$K_1(\mathcal{O}_F) \simeq \mathcal{O}_F^\times$ (Bass-Milnor-Serre)

preuve : $A = \mathcal{O}_F$

(1) D'après le théorème de Serre sur les classes il suffit de prouver que : les groupes $H_n(BGL(A)^+) \simeq H_n(BGL(A)) \simeq H_n(GL(A), \mathbb{Z})$ sont de type fini.

Idée : $X = B\mathcal{G}L(A)^+$, $\pi = \pi_1(X)$, $\tilde{X} \to X$ revêtement universel.

(1) $H_n(\tilde{X})$ est de t.f. $\forall n$:

En effet, $\tilde{X} \to X \to K(\pi, 1)$ donne

$$E^2_{pq} = H_p(\pi, H_q(\tilde{X})) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$ + π agit trivialement sur $H_q(\tilde{X})$.

(2) Si G est commutatif de t.f., alors $H^i(K(G,n))$ est de t.f. $\forall i, \forall n \geq 1$:

* $n=1$: $H^i(K(G,1)) \simeq H^i(G, \mathbb{Z})$
* $n \geq 2$: $\Omega K(G,n) = K(G, n-1)$ donc $H^i(\Omega K(G,n))$ de t.f.

$\Rightarrow H^i(K(G,n))$ de t.f. $\forall i$, en utilisant la suite spectrale de la fibration $\Omega Y \to \underbrace{PY}_{\text{espace des chemins, contractible}} \to Y$.

(3) On suppose qu'on sait que $\pi_i(\tilde{X})$ est de t.f. pour $i \leq n$.
On utilise la tour de Whitehead de $\tilde{X}$:

$$\to X_i \to \dots \to X_1 = \tilde{X}, \qquad \pi_j(X_i) \begin{cases} = 0 & \text{si } j \leq i \\ \simeq \pi_j(X) & \text{si } j > i \end{cases}$$

+ on a des fibrations $K(\pi_i(X), i-1) \to X_i \to X_{i-1}$

Fait : $H_j(X_i)$ est de t.f. $\forall i \leq n, \forall j$.

pf : Récurrence sur i. OK si $i=1$,
$i \to i+1$: utiliser la ss de $K(\pi_i(X), i-1) \to X_i \to X_{i-1}$ $\square$

Or par le th de Hurewicz, $\pi_{n+1}(X_n) \simeq H_{n+1}(X_n)$, donc
$\pi_{n+1}(X) \simeq \pi_{n+1}(X_n)$ est de t.f. $\square$

(2) (van der Kallen - Maazen) :

Le morphisme canonique $H_m(GL_n(A)) \longrightarrow H_m(GL_{n+1}(A))$ est un isomorphisme si $n \geq 2m+2$.

Donc $H_m(GL_n(A)) \xrightarrow{\sim} H_m(GL(A))$ si $n \geq 2m+2$.

(3) thm (Borel-Serre) : Soient $G/\mathbb{Q}$ un groupe réductif et $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous-groupe arithmétique. Alors $H_n(\Gamma)$ est de type fini $\forall n \in \mathbb{Z}$.

preuve : Soit X l'espace symétrique de G.

OPS que Γ soit proprement sur X (on remplace Γ par $\Gamma' \triangleleft \Gamma$ d'indice fini + $E^2_{p,q} = H_p(\Gamma/\Gamma', H_q(\Gamma')) \Rightarrow H_{p+q}(\Gamma)$).

$\overline{X}^{BS}$: compactification partielle Borel-Serre de X

$\overline{X}^{BS} \xrightarrow[\text{revêtement universel}]{} \Gamma\backslash\overline{X}^{BS}$ variété à coin compacte $\Rightarrow H_*(\Gamma) \simeq H_*(\Gamma\backslash\overline{X}^{BS})$ de t.f. $\forall n$.

□

Retour à (2) :

L'idée est de trouver un ensemble semi-simplicial X tel que :

* $GL_n(A) = G$ agit sur X, et son action sur les k-simplexes est transitive $\forall k$
* le stabilisateur d'un k-simplexe est de la forme $GL_m(A)$; $m<n$ (ou pas loin)
* X est N-connexe pour N assez grand.

On a une suite exacte de $\mathbb{Z}[G]$-modules :

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow C_0 \leftarrow \dots \leftarrow C_N \leftarrow Z_N \leftarrow 0,$$

$$C_k = \bigoplus_{\sigma\ k\text{-simplexe}} \mathbb{Z}[\sigma]$$

Soit $P_* \to \mathbb{Z}$ une résolution de $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$-modules libres. On a un double complexe :

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_2 \arrow[l] \arrow[d] & C_0\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_2 \arrow[l] \arrow[d] & C_1\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_2 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
0 & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_1 \arrow[l] \arrow[d] & C_0\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_1 \arrow[l] \arrow[d] & C_1\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_1 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
0 & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_0 \arrow[l] \arrow[d] & C_0\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_0 \arrow[l] \arrow[d] & C_1\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_0 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

C_{**}

Si lignes exactes, donc $H_*(\mathrm{Tot}\, C_{**}) = 0$.

On prend la suite spectrale calculant ↑ t.q. E^1_{pq} est H_q de la p-ième colonne.

$\forall p$, si G agit sur p-cellules:

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[\mathrm{Stab}_G(\sigma)]} R_* \xrightarrow{\sim} C_p \otimes_{\mathbb{Z}[G]} R_*$$
$$1\otimes x \longmapsto [\sigma]\otimes x$$

donc $E^1_{p+1,q} = H_q(\mathrm{Stab}_G(\sigma))$.

De plus, $E^1_{0q} = H_q(G,\mathbb{Z})$, et $E^1_{1q} \xrightarrow{d^1} E^1_{0q}$ est induite par $\mathrm{Stab}_G(\sigma) \subset G$.

En utilisant que $E^\infty = 0$, on obtient $E^2_{1q} \xrightarrow{\simeq} E^1_{0q}$ pour q pas trop grand.

Choix de l'ensemble semi-simplicial X :

déf : Si M est un A-module, une suite $(v_1, \dots, v_r)$ d'éléments de M est dite <u>unimodulaire</u> si c'est une base d'un facteur direct de M.

$\mathcal{U}(M) = \{$ suites unimodulaires de $M\}$

(stable par sous-suites, donc donne un ensemble semi-simplicial dont les k-simplexes sont les suites de longueur k)

On prend $X = \mathcal{U}(A^n)$, avec l'action évidente de $GL_n(A)$. Le stabilisateur d'un k-simplexe est conjugué à

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & * \\ 0 & GL_{n-k}(A) \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}\, k \\ \}\, n-k \end{matrix} \end{array}$$

, donc c'est plus compliqué.

Il faut en fait étudier tous les

$X(v_1, \dots, v_k) = \{ (w_1, \dots, w_n) \in X \mid (v_1, \dots, v_k)$ est une sous-suite de $(w_1, \dots, w_n) \}$

en même temps.

En particulier, dans $X(e_1)$ avec action par multiplication à droite de $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & GL_{n-1}(A) \end{pmatrix}$, le stabilisateur de (e_1) est $GL_{n-1}(A)$.

Énoncés de convexité :

déf : Le *rang stable* $rs(A)$ de A est le plus petit $r \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, a_1, \dots, a_{r+1} \in A$ engendrant l'idéal (1), $\exists\, c_1, \dots, c_r \in A$ tq $(a_1 - c_1 a_{r+1}, \dots, a_r - c_r a_{r+1}) = (1)$

prop (Bass) : $rs(A) \leq \dim(A) + 1$.

thm (van der Kallen) :

$\mathcal{U}(A^n)$ est $(n - rs(A) - 1)$ - convexe.

Plus généralement, $\mathcal{U}(A^n)(v_1, \dots, v_\ell)$ est $(n - rs(A) - \ell - 1)$ - convexe pour tout $(v_1, \dots, v_\ell) \in \mathcal{U}(A^n)$.

Cas $\dim A = 1$ ($\Rightarrow rs(A) \leq 2$), $n = 3$: $\mathcal{U}(A^3)$ convexe ?

Soit $v_1 \in A^3$ tq $(v_1) \in \mathcal{U}(A^3)$. $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$(a, b, c) = (1)$

Donc $\exists\, \lambda, \mu \in A$ tq $(a - \lambda c, b - \mu c) = (1)$.

Soit $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1 \end{pmatrix}$. $\quad v_1 - c v_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda c \\ b - \mu c \\ 0 \end{pmatrix}$

$\exists\, a', b' \in A$ tq $a'(a - \lambda c) + b'(b - \mu c) = 1$, $\quad v_3 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors (v_1, v_2, v_3) est une base de A^3. Donc v_1 et v_2 sont dans la même composante convexe.

$\left(v_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est aussi une base, donc v_2 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont dans la même composante.